

Tema 8

Circuitos en régimen permanente sinusoidal (III)

Objetivos (III)

- **Calcular la potencia activa disipada en un circuito en alterna, utilizando valores máximos o valores eficaces de tensión y corriente**
- **Calcular la impedancia de la carga en un circuito en alterna para que su resistencia disipe la máxima potencia posible**
- **Definir y calcular las potencias activa, reactiva, compleja y aparente**
- **Utilizar el triángulo de potencias para analizar un circuito en alterna**
- **Determinar el factor de potencia y distinguir si está en adelanto o en retraso**
- **Resolver circuitos de corriente alterna mediante PSpice**

Contenidos (III)

- Potencia instantánea
- Potencia activa y potencia reactiva
- Cálculos de potencia y valor eficaz
- Potencia compleja
- Potencia aparente
- Máxima transferencia de potencia

Potencia instantánea

Potencia

$$p(t) = v(t)i(t)$$

$$\begin{cases} v(t) = \sqrt{2} V \cos(\omega t + \theta_v) \\ i(t) = \sqrt{2} I \cos(\omega t + \theta_i) \end{cases}$$

Potencia instantánea

Potencia

$$p(t) = v(t)i(t)$$

$$\begin{cases} v(t) = \sqrt{2} V \cos(\omega t + \theta_v) \\ i(t) = \sqrt{2} I \cos(\omega t + \theta_i) \end{cases}$$

Cambiando el origen

$$\begin{cases} i(t) = \sqrt{2} I \cos \omega t \\ v(t) = \sqrt{2} V \cos(\omega t + \theta_v - \theta_i) \end{cases}$$

La potencia

$$p(t) = 2 V I \cos(\omega t + \theta_v - \theta_i) \cos \omega t$$

Potencia instantánea

$$p(t) = 2 V I \cos(\omega t + \theta_v - \theta_i) \cos \omega t$$

Trigonometría: $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta)$

Sea $\alpha = \omega t + \theta_v - \theta_i$ y $\beta = \omega t$, entonces

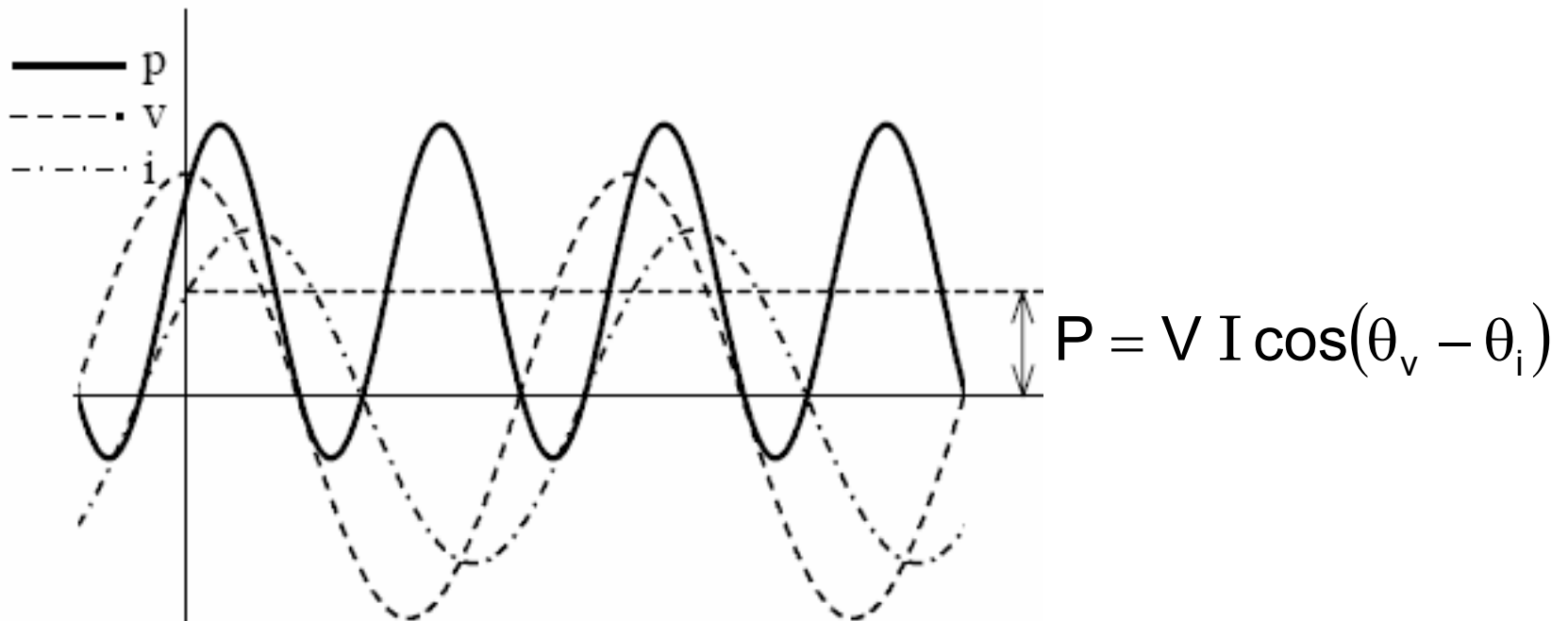
$$p(t) = V I \cos(\theta_v - \theta_i) + V I \cos(2\omega t + \theta_v - \theta_i)$$

Trigonometría: $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \text{sen} \alpha \text{sen} \beta$

Finalmente

$$\begin{aligned} p(t) &= V I \cos(\theta_v - \theta_i) \\ &+ V I \cos(\theta_v - \theta_i) \cos 2\omega t \\ &- V I \text{sen}(\theta_v - \theta_i) \text{sen} 2\omega t \end{aligned}$$

Potencia instantánea



Potencia activa y potencia reactiva

$$p(t) = P + P \cos 2\omega t - Q \sin 2\omega t$$

donde


$$P = V I \cos(\theta_v - \theta_i)$$

$$Q = V I \sin(\theta_v - \theta_i)$$

P : potencia activa (media) [W]

Q : potencia reactiva [VAr]

La potencia activa
es la potencia media



Potencia activa y reactiva

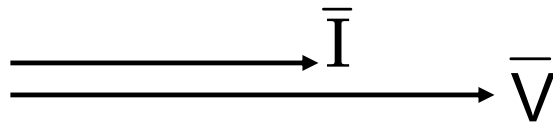
Circuito resistivo puro

$$\theta_v - \theta_i = 0$$

$$p(t) = P + P \cos 2\omega t$$

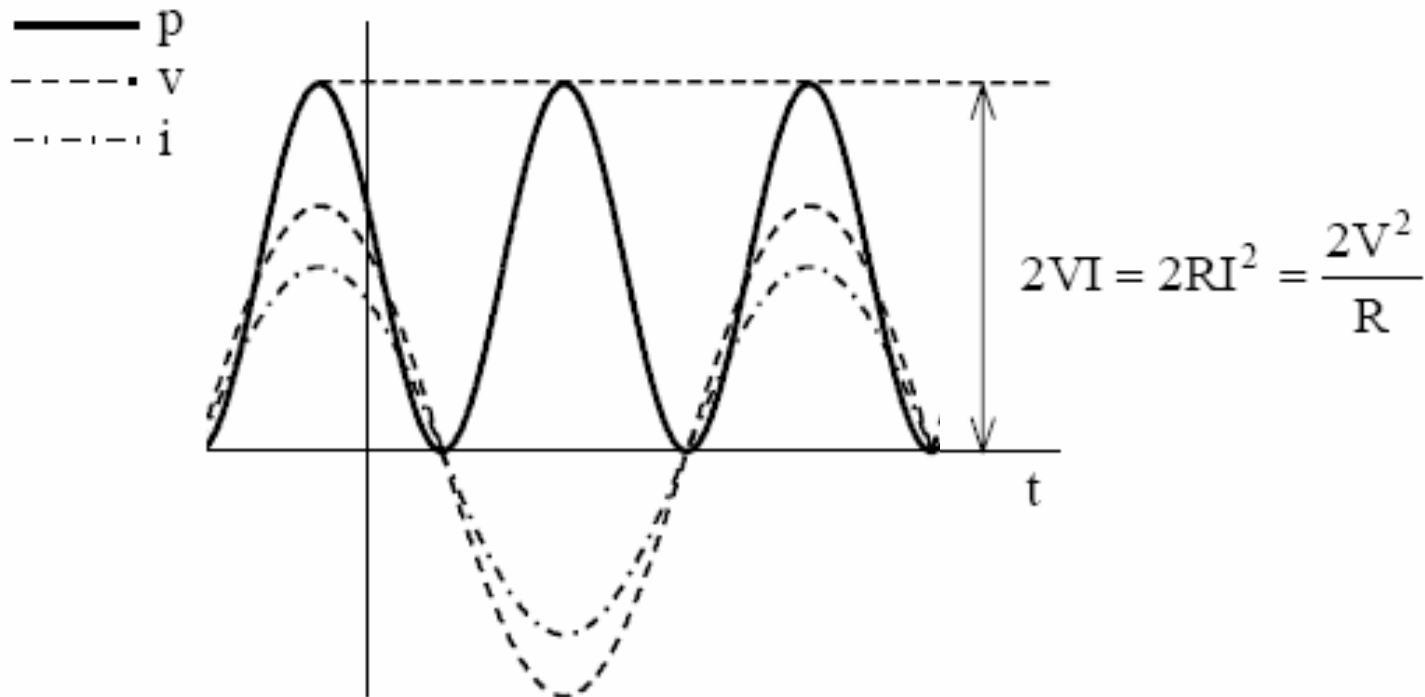
$$\text{Potencia activa : } P = VI = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{V_m I_m}{2}$$

$$\text{Potencia reactiva : } Q = 0$$



Potencia instantánea

circuito resistivo puro



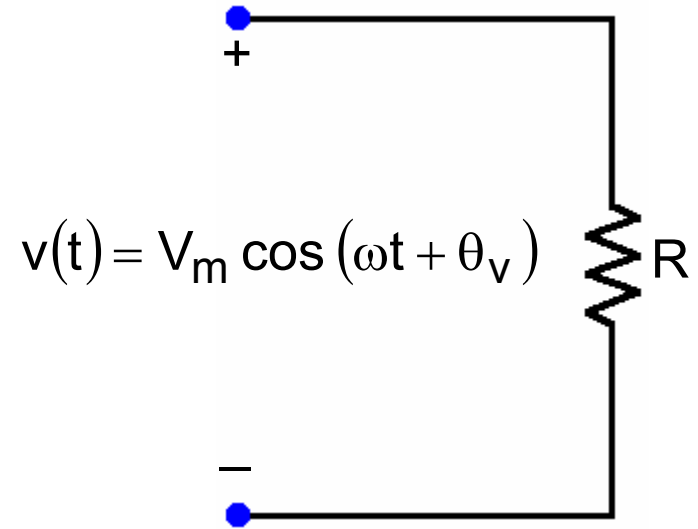
Valor eficaz y potencia activa

circuito resistivo puro

Potencia media

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \overbrace{\frac{V_m^2 \cos^2(\omega t + \theta_v)}{R}}^{v^2(t)/R} dt$$

$$P = \frac{1}{R} \left[\underbrace{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} V_m^2 \cos^2(\omega t + \theta_v) dt}_{V^2} \right]$$



Valor eficaz al cuadrado

$$P = \frac{V^2}{R}$$

análogamente

$$P = I^2 R$$

¡igual que en continua!

Ejemplo 8.8

- a) Una fuente de tensión sinusoidal cuya amplitud máxima es de 625 V se conecta a una resistencia de 50 Ω . Determinar la potencia activa que se consume en la resistencia
- b) Igual que a), pero mediante el cálculo de la corriente por la resistencia

Ejemplo 8.8 (I)

a) El valor eficaz de la fuente de tensión es : $\frac{625}{\sqrt{2}}$

$$P = \frac{\left(\frac{625}{\sqrt{2}}\right)^2}{50} = 3906.25 \text{ W}$$

b) La amplitud máxima de la corriente por la resistencia es : $\frac{625}{50}$

El valor eficaz de la corriente es : $\frac{\frac{625}{50}}{\sqrt{2}} = 8.84 \text{ A}$

$$P = (8.84)^2 50 = 3906.25 \text{ W}$$

Potencia activa y reactiva

Circuito inductivo puro

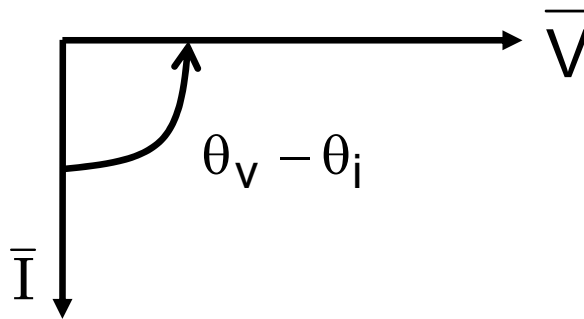
$$\theta_v - \theta_i = 90^\circ$$

$$p(t) = -Q \sin 2\omega t$$

Potencia activa : $P = 0$

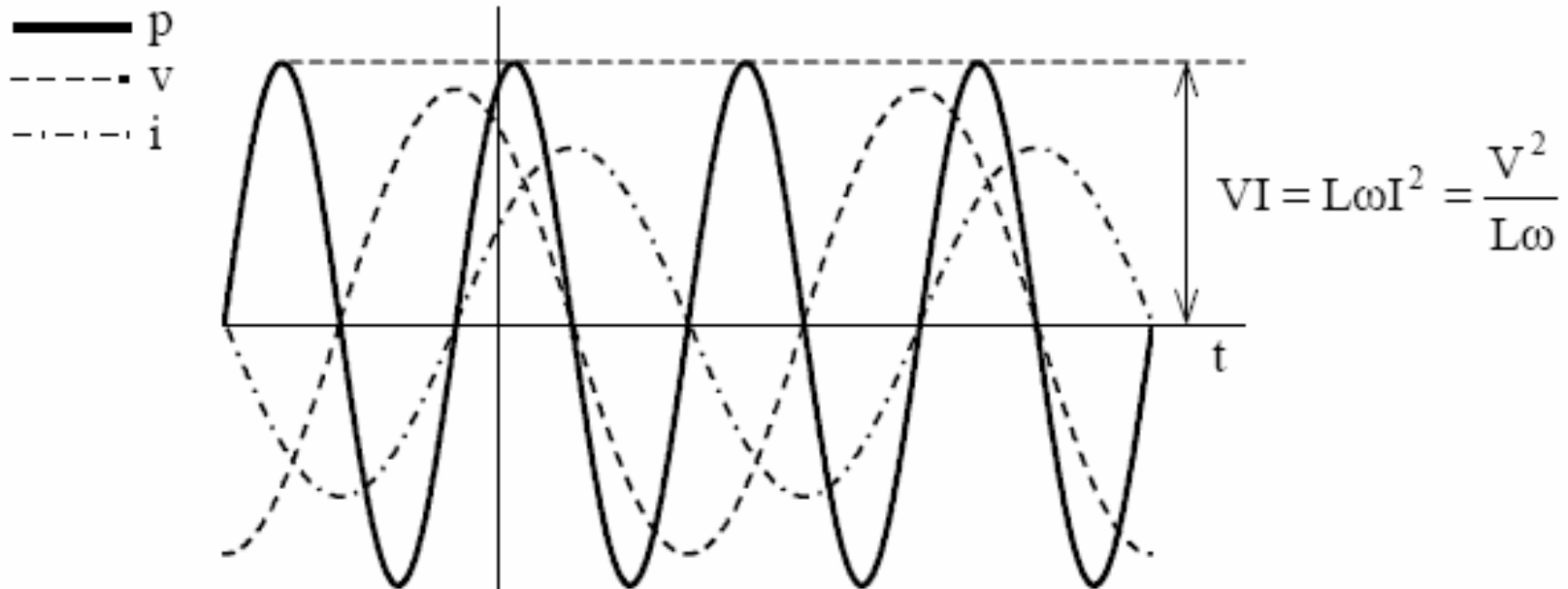
$$\text{Potencia reactiva : } Q = VI = \frac{V_m I_m}{2}$$

$$p(t) = -VI \sin 2\omega t$$



Potencia instantánea

circuito inductivo puro



Potencia activa y reactiva

Circuito capacitivo puro

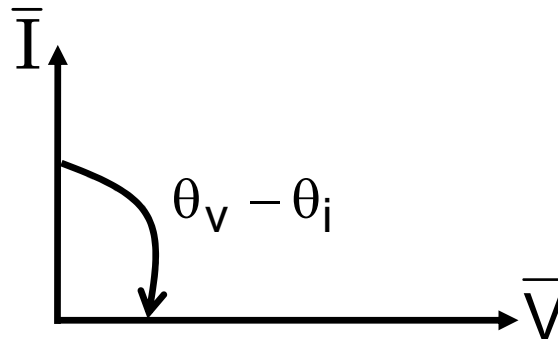
$$\theta_v - \theta_i = -90^\circ$$

$$p(t) = -Q \sin 2\omega t$$

$$\text{Potencia activa : } P = 0$$

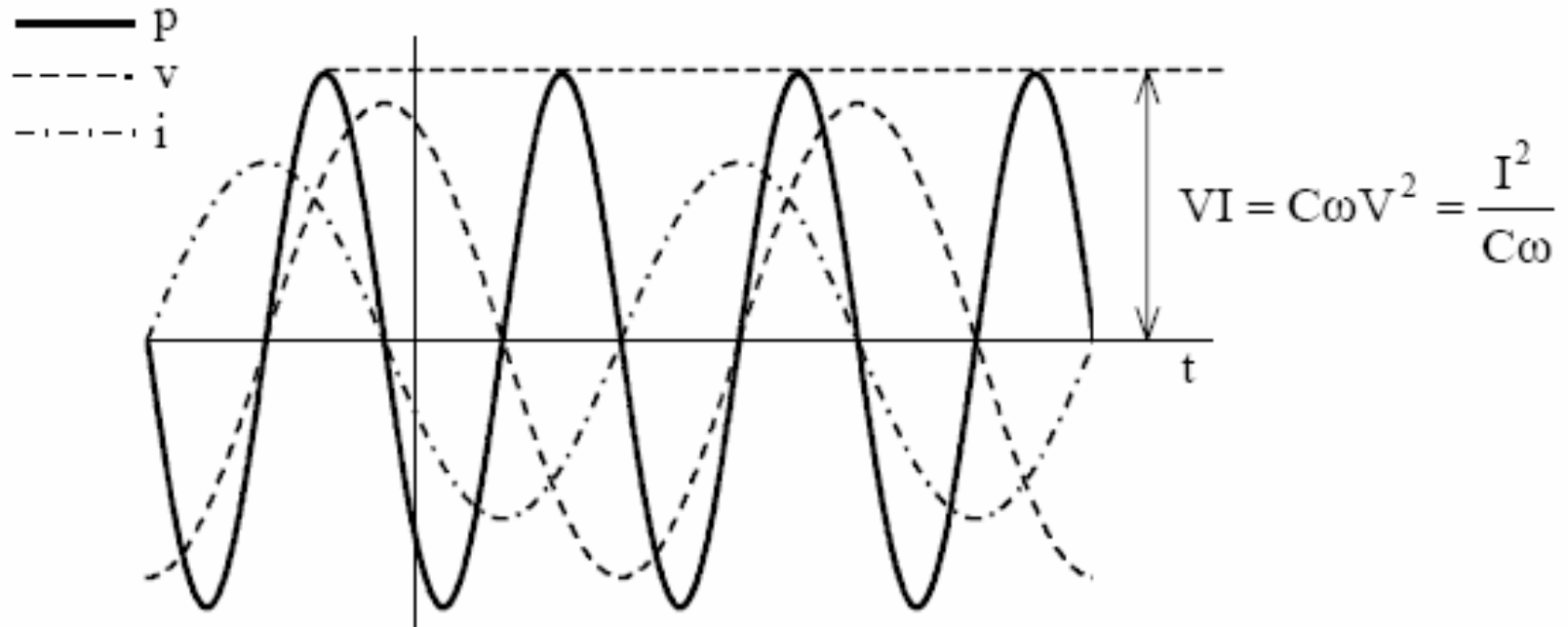
$$\text{Potencia reactiva : } Q = -VI = -\frac{V_m I_m}{2}$$

$$p(t) = VI \sin 2\omega t$$



Potencia instantánea

condensador

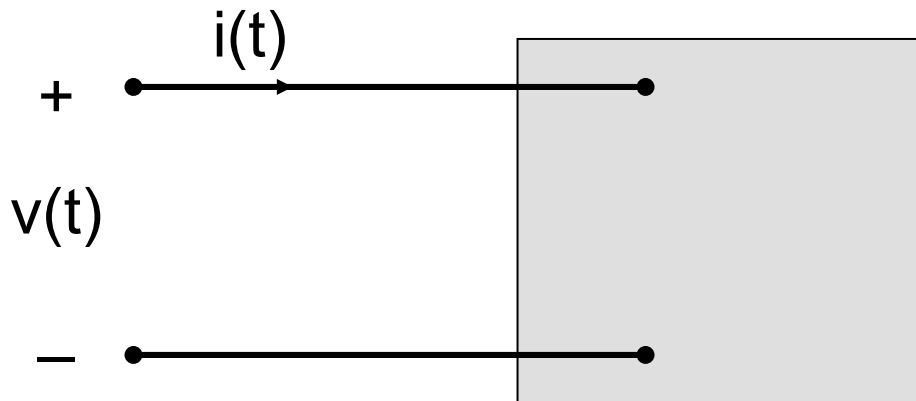


Ejemplo 8.9

- a) Calcular la potencia activa y reactiva en bornes del circuito suponiendo que:

$$v(t) = 100 \cos(\omega t + 15^\circ) \text{ V, e } i(t) = 4 \sin(\omega t - 15^\circ) \text{ A}$$

- b) Determinar si el dispositivo absorbe o genera potencia activa
- c) Determinar si el dispositivo absorbe o genera potencia reactiva



Ejemplo 8.9 (I)

a) Primero se expresa $i(t)$ como una función coseno :

$$i(t) = 4 \cos(\omega t - 105^\circ) \text{ A}$$

Entonces, la potencia activa y reactiva es :

$$P = \frac{100}{\sqrt{2}} \times \frac{4}{\sqrt{2}} \times \cos[15^\circ - (-105^\circ)] = -100 \text{ W}$$

$$Q = \frac{100}{\sqrt{2}} \times \frac{4}{\sqrt{2}} \times \sin[15^\circ - (-105^\circ)] = 173.21 \text{ VAR}$$

b) Consume -100W o genera 100 W

c) Consume 173.21 VAR

Factor de potencia

$\varphi = \theta_v - \theta_i$ ángulo φ

$\cos \varphi$: factor de potencia

- * Corriente retrasada ("lagging")

 - φ positivo

 - Receptor inductivo

- * Corriente adelantada ("leading")

 - φ negativo

 - Receptor capacitivo

Factor de potencia

Potencia activa y reactiva

$$P = V I \cos(\theta_v - \theta_i)$$

$$P = V I \cos \varphi$$

$$P = VI \cos \varphi$$

$$Q = VI \sin \varphi$$

Potencia compleja

Por definición

$$S = P + jQ \quad [\text{VA}]$$

Para la potencia activa

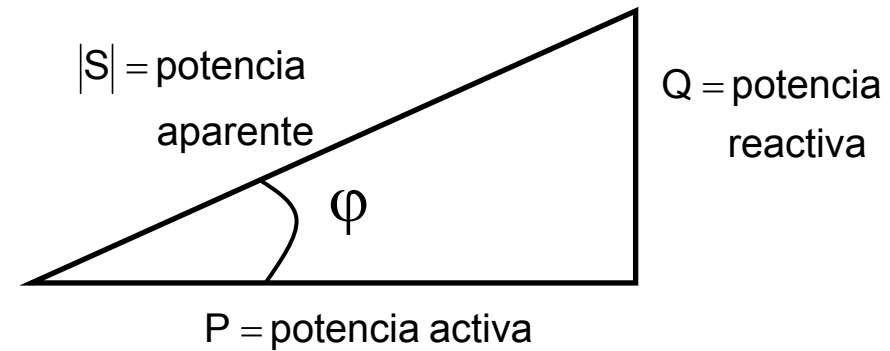
$$P = \Re\{S\}$$

Para la potencia reactiva

$$Q = \Im\{S\}$$

Ángulo φ

$$\frac{Q}{P} = \frac{VI \sin \varphi}{VI \cos \varphi} = \operatorname{tg} \varphi; \quad \varphi = \arctan \frac{Q}{P}$$



Potencia aparente

Potencia aparente : módulo de la potencia compleja

$$|S| = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad [VA]$$

- P se suma como patatas
- Q se suma como patatas
- S no se suma como patatas

Potencia compleja

$$S = P + jQ = VI\cos\varphi + jVI\sin\varphi$$

$$S = VI[\cos\varphi + j\sin\varphi]$$

$$S = VIe^{j\varphi} = VI\angle\varphi$$

Esto es

$$S = VI\angle\varphi$$

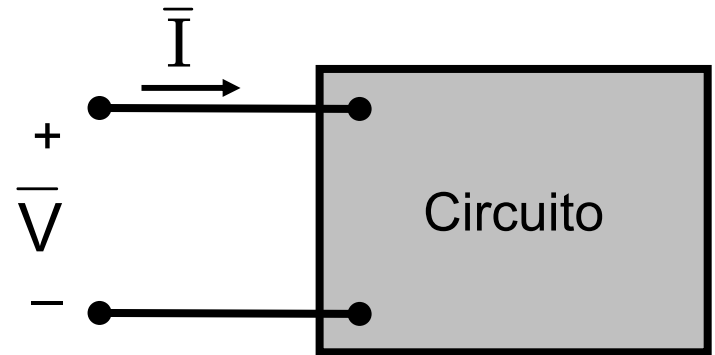
Para un determinado nudo

$$\bar{V} = V\angle\theta_v$$

$$\bar{I} = I\angle\theta_i$$

$$S = VI\angle(\theta_v - \theta_i) = VIe^{j(\theta_v - \theta_i)}$$

$$S = Ve^{j\theta_v} Ie^{-j\theta_i} = \bar{V}\bar{I}^*$$



$$S = VI\angle\varphi$$

$$S = \bar{V}\bar{I}^*$$

Potencia compleja

$$\bar{V} = Z\bar{I}$$

$$S = \bar{V}\bar{I}^* = Z\bar{I}\bar{I}^* = Z|\bar{I}|^2$$

$$S = |\bar{I}|^2(R + jX) = |\bar{I}|^2 R + j|\bar{I}|^2 X$$

$$S = P + jQ$$

Por tanto

$$P = |\bar{I}|^2 R = I^2 R$$

$$Q = |\bar{I}|^2 X = I^2 X$$

también

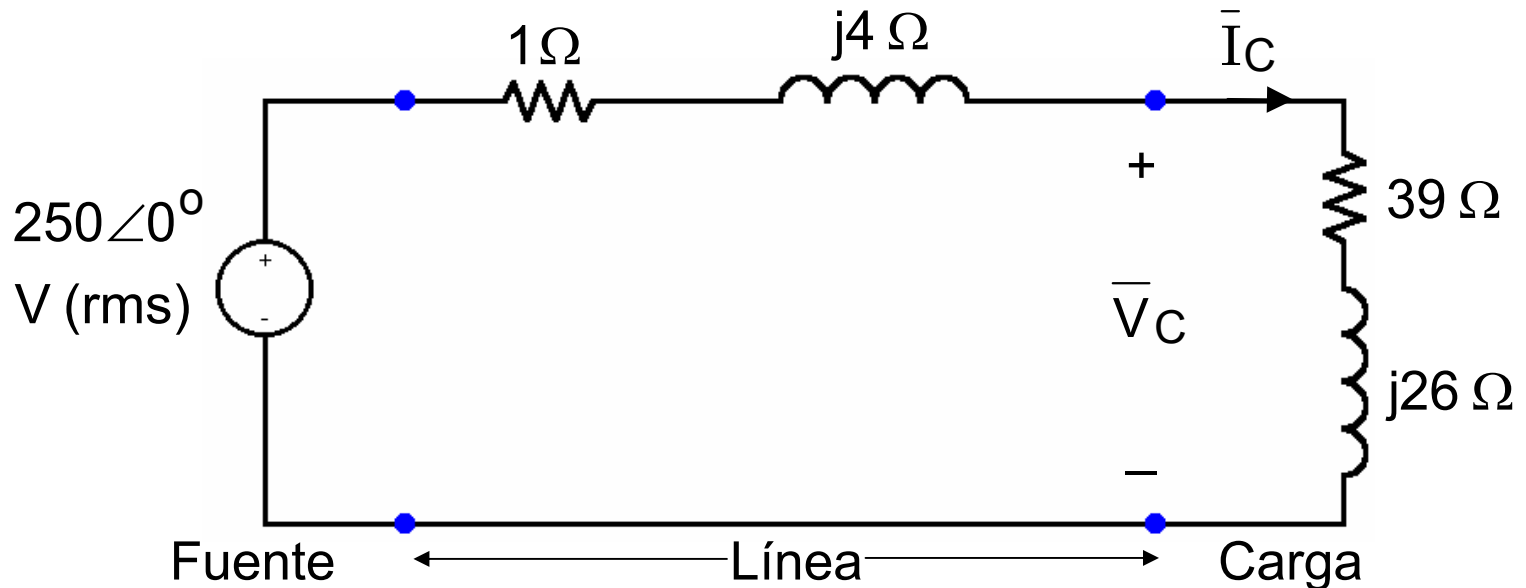
$$S = \bar{V} \left(\frac{\bar{V}}{Z} \right)^* = \frac{V^2}{Z^*} = P + jQ$$

$$Z = R \Rightarrow P = \frac{V^2}{R}, \quad Q = 0$$

$$Z = jX \Rightarrow Q = \frac{V^2}{X}, \quad P = 0$$

Ejemplo 8.10

- a) Calcular la corriente \bar{I}_L y la tensión \bar{V}_L
- b) Calcular la potencia activa y reactiva que consume la carga
- c) Calcular la potencia activa y reactiva que consume la línea
- d) Calcular la potencia activa y reactiva que genera la fuente



Ejemplo 8.10 (I)

a)

$$\bar{I}_C = \frac{250 \angle 0^\circ}{40 + j30} = 4 - j3 = 5 \angle -36.87^\circ \text{ A (rms)}$$

$$\bar{V}_C = (39 + j26)\bar{I}_C = 234 - j13 = 234.36 \angle -3.18^\circ \text{ V (rms)}$$

b)

$$S = \bar{V}_C \bar{I}_C^* = (234 - j13)(4 + j3) = 975 + j650 \text{ VA}$$

Por tanto, la carga absorbe 975 W de potencia activa y 650 VAR de potencia reactiva

Ejemplo 8.10 (II)

c) Para la línea

$$P_{\text{Linea}} = (5)^2 \times 1 = 25 \text{ W}$$

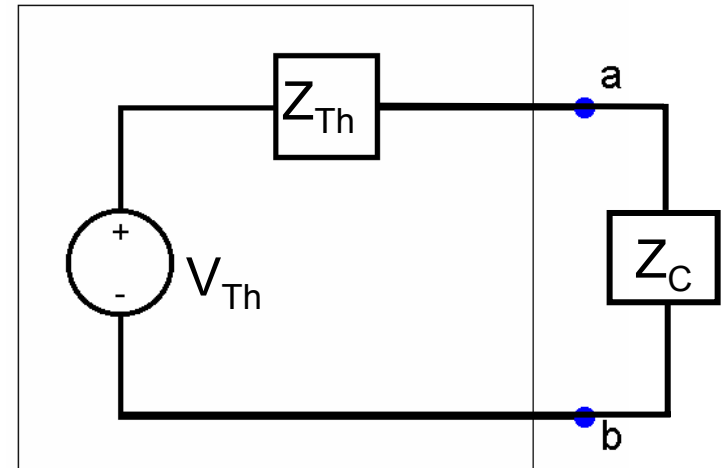
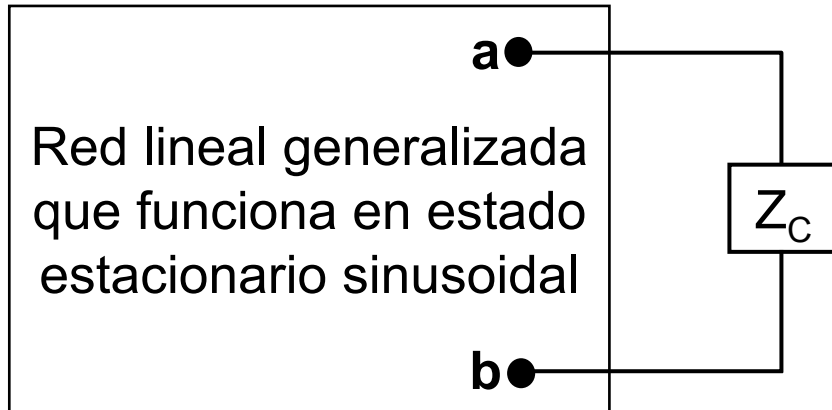
$$Q_{\text{Linea}} = (5)^2 \times 4 = 100 \text{ VAR}$$

d) La fuente genera lo que consume la línea y la carga

$$S_{\text{Fuente}} = S_{\text{Linea}} + S_{\text{C}} = 25 + j100 + 975 + j650 = 1000 + j750 \text{ VA}$$

La fuente genera 1000 W de potencia activa y 750 VAR de potencia reactiva

Máxima transferencia de potencia

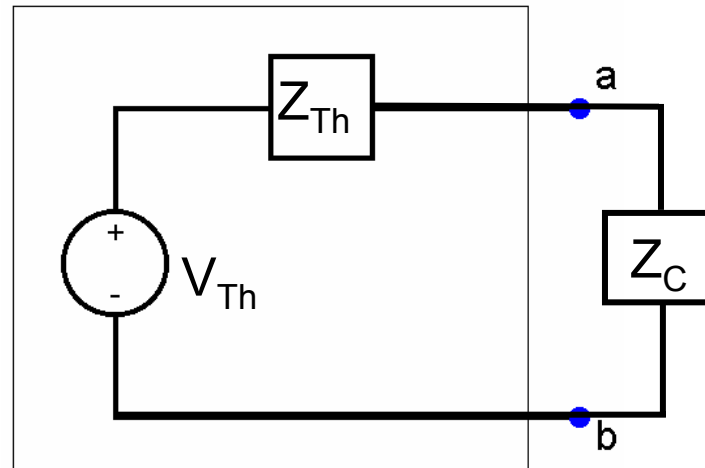


$$Z_{Th} = R_{Th} + jX_{Th}; V_{Th} \angle 0^\circ$$

$$Z_C = R_C + jX_C$$

$$\bar{I} = \frac{V_{Th} \angle 0^\circ}{(R_{Th} + R_C) + j(X_{Th} + X_C)}$$

Máxima transferencia de potencia



Potencia activa suministrada

$$P = |\bar{I}|^2 R_C = \frac{|\bar{V}_{Th}|^2}{(R_{Th} + R_C)^2 + (X_{Th} + X_C)^2} R_C$$

Máxima transferencia de potencia

Condiciones de primer orden :

$$\frac{\partial P(R_C, X_C)}{\partial X_C} = \frac{-|\bar{V}_{Th}|^2 2X_C(X_C + X_{Th})}{[(R_C + R_{Th})^2 + (X_C + X_{Th})^2]^2}$$

$$\frac{\partial P(R_C, X_C)}{\partial R_C} = \frac{|\bar{V}_{Th}|^2 [(R_C + R_{Th})^2 + (X_C + X_{Th})^2 - 2R_C(R_C + R_{Th})]}{[(R_C + R_{Th})^2 + (X_C + X_{Th})^2]^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial P(R_C, X_C)}{\partial X_C} = 0 \\ \frac{\partial P(R_C, X_C)}{\partial R_C} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} X_C = -X_{Th} \\ R_C = \sqrt{R_{Th}^2 + (X_C + X_{Th})^2} = R_{Th} \end{cases}$$

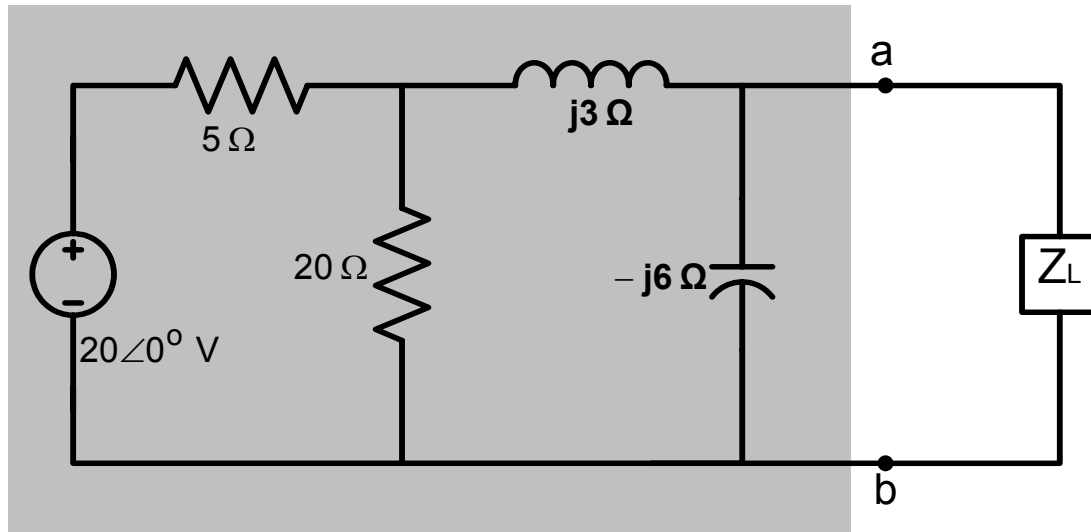
Máxima transferencia de potencia

Para $Z_C = Z_{Th}^*$

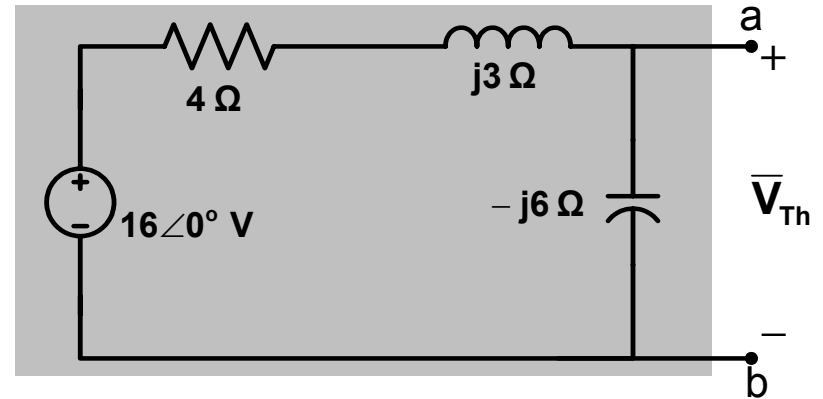
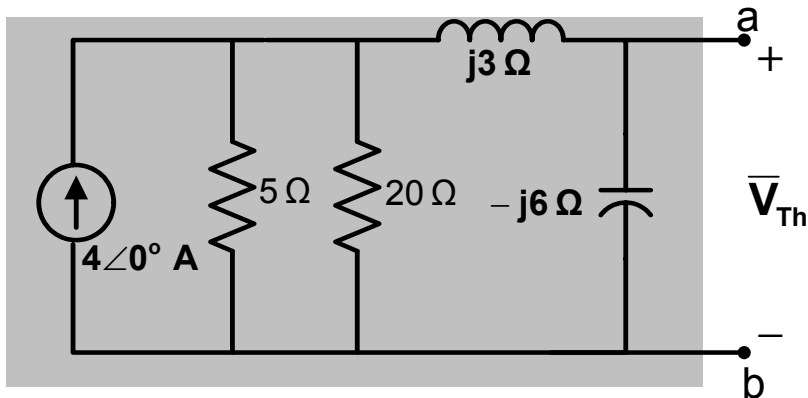
$$P_{\max} = \frac{|\overline{V}_{Th}|^2}{(R_{Th} + R_C)^2 + (X_{Th} + X_C)^2} R_C = \frac{V_{Th}^2 R_C}{4R_C^2} = \frac{1}{4} \frac{V_{Th}^2}{R_C}$$

Ejemplo 8.11

- a) Determinar la impedancia Z_C que origina la máxima transferencia de potencia activa a esta carga
- b) ¿Cuál es la potencia activa máxima que se transfiere a la impedancia de la carga determinada en (a)?



Ejemplo 8.11 (I)



- a) Después de aplicar dos transformaciones de fuentes se calcula el equivalente Thévenin :

$$\bar{V}_{Th} = \frac{16\angle 0^\circ}{4 + j3 - j6}(-j6) = 19.2\angle -53.13^\circ = 11.52 - j15.36 \text{ V}$$

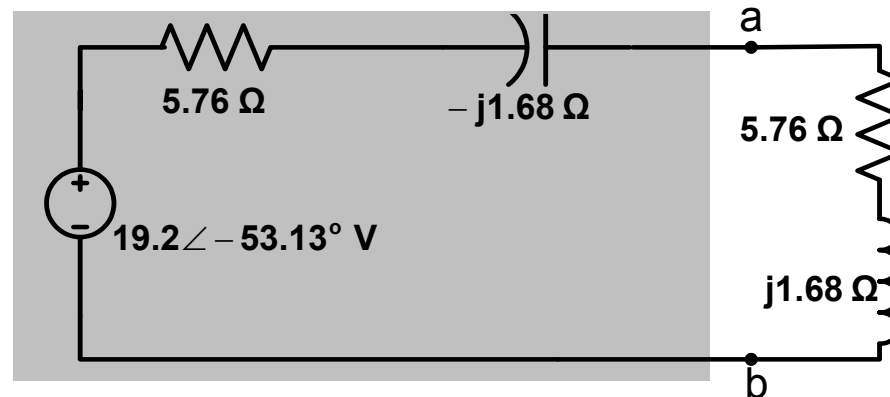
Ejemplo 8.11 (II)

Desactivando la fuente independiente, se obtiene :

$$Z_{Th} = \frac{(-j6)(4 + j3)}{4 + j3 - j6} = 5.76 - j1.68 \Omega$$

Para una máxima transferencia de potencia $Z_C = Z_{Th}^*$

$$Z_C = 5.76 + j1.68 \Omega$$



Ejemplo 8.11 (III)

b) El módulo del valor eficaz de la corriente que consume la carga es :

$$|\bar{I}| = \frac{\frac{19.2}{\sqrt{2}}}{2 \times 5.76} = 1.1785 \text{ A}$$

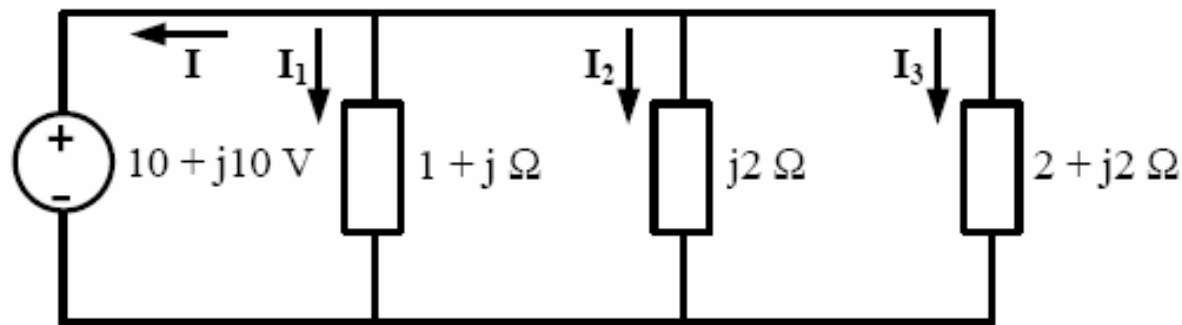
La potencia activa que consume la carga es :

$$P = |\bar{I}|^2 R_C = (1.1785)^2 \times 5.76 = 8 \text{ W}$$

Balance de potencias. Teorema de Boucherot

- **En un circuito aislado de corriente alterna, tanto el balance de potencias activas por todos los elementos, así como el de las potencias reactivas, es nulo**
- **No es aplicable a potencias aparentes**

Ejemplo 8.12



$$\mathbf{I}_1 = \frac{10 + j10}{1 + j} = \frac{10\sqrt{2}\angle 45^\circ}{\sqrt{2}\angle 45^\circ} = 10\angle 0^\circ \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{10 + j10}{j2} = \frac{10\sqrt{2}\angle 45^\circ}{2\angle 90^\circ} = 5\sqrt{2}\angle -45^\circ \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_3 = \frac{10 + j10}{2 + j2} = \frac{10\sqrt{2}\angle 45^\circ}{2\sqrt{2}\angle 45^\circ} = 5\angle 0^\circ \text{ A}$$

$$\mathbf{I} = -(\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3) = -(10 + 5 - j5 + 5) = -20 + j5 = 20,6155\angle 165,964^\circ \text{ A}$$

Ejemplo 8.12 (I)

Las potencias activas y reactivas absorbidas por cada impedancia son:

$$P_1 = R_1 I_1^2 = 1 \cdot 10^2 = 100 \text{ W} \quad ; \quad Q_1 = X_1 I_1^2 = 1 \cdot 10^2 = 100 \text{ VAr}$$

$$P_2 = R_2 I_2^2 = 0 \cdot (5\sqrt{2})^2 = 0 \text{ W} \quad ; \quad Q_2 = X_2 I_2^2 = 2 \cdot (5\sqrt{2})^2 = 100 \text{ VAr}$$

$$P_3 = R_3 I_3^2 = 2 \cdot 5^2 = 50 \text{ W} \quad ; \quad Q_3 = X_3 I_3^2 = 2 \cdot 5^2 = 50 \text{ VAr}$$

Las potencias absorbidas por el generador son:

$$\mathbf{VI}^* = 10\sqrt{2}\angle 45^\circ \times 20,6155\angle -165,964 = -150 - j250 = P + jQ$$

$$P = -150 \text{ W} \quad ; \quad Q = -250 \text{ VAr}$$

Se comprueba que tanto el balance de potencias activas como reactivas es nulo, pues:

$$\sum P = 100 + 0 + 50 - 150 = 0 \quad ; \quad \sum Q = 100 + 100 + 50 - 250 = 0$$